



TITLE:

# $H^\infty(D)$ の二,三の話題 (Function Algebraとその応用)

AUTHOR(S):

貴志, 一男

---

CITATION:

貴志, 一男.  $H^\infty(D)$ の二,三の話題 (Function Algebraとその応用).  
数理解析研究所講究録 1975, 232: 65-79

ISSUE DATE:

1975-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/105459>

RIGHT:

# $H^\infty(D)$ の二, 三の話題

和歌山大 教育 賞志 一男

## § 0. 序.

次の (1) ~ (3) について述べる.

(1) Lindelöf の定理. 関数  $f \in H^\infty(D)$  の境界関数  $f^*(e^{i\theta})$  とする. もし  $\theta \rightarrow 0^+$  (または  $0^-$ ) のとき  $\text{ess lim } f^*(e^{i\theta}) = 0$  ならば, 原点を 1 とする任意の Stolz 角領域  $A$  に対して  $\lim_{\substack{z \in A \\ |z| \rightarrow 1}} f(z) = 0$  となる. この定理の uniform algebra 的解釈について ([6]).

(2) 単位開円板  $D$  の境界点 1 に近づく  $D$  の部分集合からなるフィルター  $\Gamma$  (例えば点 1 に nontangential に近づくことに対応するフィルター  $\Gamma_A$ ) にそっての  $H^\infty(D)$  の関数の極限について ([2]).

(3)  $H^\infty(D)$  の極大イデアル空間の点  $1$  の  $\check{V}$  の fiber 中にある Gleason part に関係する話について.

## § 1. Harmonic measure.

$D$  上で有界な正則関数の全体からなる Banach algebra を  $H^\infty(D) = H^\infty$  で表わし,  $H^\infty$  の極大イデアル空間  $M(H^\infty)$  を  $\bar{D}$  で表わす.  $D$  は  $\bar{D}$  で稠密である.  $D$  上の連続関数  $f$  が  $\bar{D}$  上の連続関数に拡張できるとき, この拡張した関数を  $\hat{f}$  で表わす.  $u$  を  $D$  上の調和関数で上方(または下方)に有界であるとし,  $v$  を  $u$  の共役調和関数とすると,  $f = \exp(u + iv)$  (または  $1/f$ ) が  $H^\infty$  に属する. この事から  $u$  は  $\bar{D}$  の実数値連続関数  $\hat{u}$  に拡張される.

集合  $A \subset \bar{D}$  の  $\bar{D}$  における閉包を  $\bar{A}$  で, また  $\bar{A} \cap (\bar{D} - D)$  を  $A'$  で表わす. 特に  $D' = \bar{D} - D$ . また identity function  $f(z) = z$  に対して,  $\{z \in \bar{D} : \hat{f}(z) = 1\} = D_1$  を点 1 上の fiber という.

単位円周  $C$  上の Lebesgue 測度  $d\theta$  による  $L^\infty(d\theta) = L^\infty(C)$  で,  $L^\infty(C)$  の極大イデアル空間を  $X$  で表わすと,  $X \subset D'$  で  $H^\infty$  の Silov 境界と同一視される.  $X_1 = X \cap D_1$  とおく. 関数  $u^* \in L^\infty(C)$  の Poisson 積分

$$u(z) = P_z(u^*) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u^*(e^{i\theta}) \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2} d\theta$$

$$(z = re^{i\varphi}, \quad 0 \leq r < 1)$$

は  $D$  上の有界な複素調和関数である.  $u^* \mapsto u^s = \hat{u}|_X$  なる写像によって  $L^\infty(C)$  と  $C(X)$  は Banach algebra として同型になる.

特に  $u^* = \chi_A$  を  $\mathbb{C}$  上の Lebesgue 可測集合  $A$  の特性関数とすると,  $u^s$  は  $X$  上の clopen 集合  $A^s (= \{x \in X : \hat{\chi}_A = 1\})$ ,  $\hat{\chi}_A$  は  $\chi_A \in L^\infty(\mathbb{C})$  の Gelfand 表現) の特性関数になる,  $u^* = \chi_A$  の Poisson 積分  $u(z) = \mu(z, A) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \chi_A(e^{i\theta}) \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\phi)+r^2} d\theta$  ( $z = re^{i\phi}$ ,  $0 \leq r < 1$ ) は  $A$  の harmonic 測度である.

一般に  $u^* \in L^\infty(\mathbb{C})$  に対しては

$$u(z) = \int_{\mathbb{C}} u^*(\xi) \mu(z, d\xi), \quad z \in \mathbb{D}$$

とせよ.  $(u^*, u, u^s)$  と  $z \in \overline{\mathbb{D}}$  に対して, 写像  $u^s \mapsto \hat{u}(z)$  は  $\mathbb{C}(X)$  上の線形汎関数であって,  $X$  上の確率測度  $\nu(z, \cdot)$  によって

$$\hat{u}(z) = \int_X u^s(\xi) \nu(z, d\xi) = \int_X \hat{u}(\xi) \nu(z, d\xi), \quad z \in \overline{\mathbb{D}}$$

と表わされる. 測度  $\nu(z, \cdot)$  は  $(X$  上の測度の vague 位相で)  $z \in \overline{\mathbb{D}}$  の連続関数である.

$A^s (\subset X)$  が clopen 集合であるときは  $\nu(\cdot, A^s) | \mathbb{D} = \mu(\cdot, A)$  は  $\mathbb{D}$  上の調和関数で,  $\overline{\mathbb{D}}$  の連続関数  $\nu(\cdot, A^s) = \hat{\mu}(\cdot, A)$  に拡張される.

$f \in H^\infty$  に対して

$$\log |f(z)| \leq \int_{\mathbb{C}} \log |f^*(\xi)| \mu(z, d\xi), \quad z \in \mathbb{D}$$

または,

$$\log |\hat{f}(z)| \leq \int_X \log |\hat{f}(\xi)| \nu(z, d\xi), \quad z \in \overline{\mathbb{D}}$$

## § 2. Cluster sets.

$\Gamma$  を  $D$  の部分集合 からなる filter で, ユークリッド極限 1 をもつものとする.  $f \in H^\infty$  に対して  $\bigcap_{A \in \Gamma} f(A)^-$  ( $f(A)^-$  は  $f(A)$  の閉包) を 1 における  $f$  の  $\Gamma$  cluster values の集合という. 特に  $f$  が identity function のときは  $\Gamma' = \bigcap_{A \in \Gamma} f(A)^- = \bigcap_{A \in \Gamma} \bar{A}$  は  $D_1$  のコンパクト集合である.  $\Gamma'$  の点を  $\Gamma$  点という.  $f \in H^\infty$  に対して,  $\alpha \in \bigcap_{A \in \Gamma} f(A)^- \iff \alpha \in \hat{f}(\Gamma')$  であり, また  $\lim_{\Gamma} f = \alpha \iff \hat{f}|_{\Gamma'} = \alpha$  である.  $B$  を  $D_1$  の閉部分集合とするとき,  $B$  の  $\bar{D}$  近傍の  $D$  上の trace からなる filter を  $\Gamma(B)$  で表わす. このとき  $B = \Gamma(B)'$  である. 一般に  $\Gamma(\Gamma') \subset \Gamma$  であるが  $\lim_{\Gamma} f = \alpha \iff \lim_{\Gamma(\Gamma')} f = \alpha$  が成り立つ.

### §3. Lindelöf の定理.

Lindelöf の定理.  $f \in H^\infty(D)$  の境界関数を  $f^*(e^{i\theta})$  とする. もし  $\theta \rightarrow 0^+$  (または  $0^-$ ) のとき  $\text{ess lim } f^*(e^{i\theta}) = 0$  であるとする. このとき厚点を 1 とする任意の Stolz 角領域  $S$  に対して  $\lim_{\substack{z \in S \\ |z| \rightarrow 1}} f(z) = 0$  とする.

(注. 任意正数  $\varepsilon$  に対して円周  $C$  上の 1 の任意の近傍  $U(1)$  が存在して  $m(\{ |f^*| < \varepsilon \} \cap \{ M^+ \cap U(1) \}) = m(M^+ \cap U(1))$  となることは  $\text{ess lim}_{\theta \rightarrow 0^+} f^*(e^{i\theta}) = 0$  を意味する. ただし,  $M^+$  は  $C$  上の弧  $\{ e^{i\theta} \mid 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \}$  である.)

定理の解釈.  $\mathcal{L} = \{ z \in D_1 - X_1 : \text{ess } \lim_{\theta \rightarrow 0^+} f^*(e^{i\theta}) = 0 \text{ (or } \theta \rightarrow 0^-) \Rightarrow \hat{f}(z) = 0 \}$  とおき,  $\mathcal{L}$  の点を Lindelöf 点 といふ. また頂点を 1 とする Stolz 角領域  $S$  と点 1 の (ユークリッド) 近傍系  $\mathcal{U}$  に対して,  $\{S \cap U : U \in \mathcal{U}\}$  によって生成される filter を  $\mathcal{S}^\Gamma$  で表わし  $\mathcal{S} = \bigcup_{\beta} (\mathcal{S}^\Gamma)'$  ( $= \bigcup_{\beta} \mathcal{S}'$ ) とおき,  $(\mathcal{S}^\Gamma)' = \mathcal{S}'$  となることは容易にわかる).  $\mathcal{S}$  に属する点を Stolz 点 といふ. 関数  $f \in H^\infty$  に対して

$$\lim_{\substack{z \in S \\ z \rightarrow 1}} f = \alpha \iff \lim_{\mathcal{S}^\Gamma} f = \alpha \iff \hat{f}|_{(\mathcal{S}^\Gamma)'} = \alpha \iff \hat{f}|_{\mathcal{S}'} = \alpha$$

であるから, 任意の Stolz 角領域  $S$  に対して  $\lim_{\substack{z \in S \\ z \rightarrow 1}} f = \alpha$  ということと  $\hat{f}|_S = \alpha$  ということとは同値である. よって,

Lindelöf の定理は  $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$  と書き換えることができる.

$\mathcal{L}$  について.  $\mathbb{C}$  上の可測集合  $M$  に対して  $M_1^S = M^S \cap X_1$  とおくと, 任意の  $f \in L^\infty(\mathbb{C})$  に対して

$$\hat{f}(M_1^S) = \{ \alpha : m(\{ |f - \alpha| < \varepsilon \} \cap (M \cap N(1))) > 0 \text{ for } \forall \varepsilon > 0, \forall N(1) (\mathbb{C} \text{ 上の点 } 1 \text{ の近傍}) \}$$

とある (ただし  $m$  は  $\mathbb{C}$  上の Lebesgue 測度).

$\mathbb{C}$  上の弧  $M = \{ e^{i\theta} : 0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2} \}$  に対して,  $M_1^S = M^S \cap X_1$  を  $X_1$  の上部 といふ. このとき 定理の仮定の部分 ( $\text{ess } \lim_{\theta \rightarrow 0^+} f^*(e^{i\theta}) = 0$  as  $\theta \rightarrow 0^+$  (or  $\theta \rightarrow 0^-$ )) は  $X_1$  の上部  $M_1^S$  に対して  $\hat{f}(M_1^S) = \{0\}$  (or  $\hat{f}(X_1 - M_1^S) = \{0\}$ ) となることを意味す

る. よって

$$\mathcal{L} = \{ z \in D_1 - X_1 : \hat{f} \equiv 0 \text{ on } M_1^S \text{ or } X_1 - M_1^S \Rightarrow \hat{f}(z) = 0 \}$$

となる.

$\delta$  について.  $M = i\overline{e^{i\theta_0}}$  ( $0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$ ) とする.  $z_0 \in D$  に対して  $\{z \in D : \mu(z, M) = \mu(z_0, M)\} = \beta$  は 3 点  $1, e^{i\theta_0}, z_0$  を通る円と  $D$  の共通部分であり,  $z \in \beta$  に対して  $\mu(z, M) = \frac{\delta}{\pi} \in (0, 1)$  である. (C. Carathéodory, Funktionentheorie I, Birkhäuser, Basel, 1950) により,  $\delta$  は  $\beta$  と弧  $C - i\overline{e^{i\theta_0}}$  のなす角である.  $\beta \cap D_1$  上にある Stolz 点をとると, ネット  $\{z_\alpha\} (\subset \beta)$  が存在して  $z_\alpha \rightarrow z$  となるから,  $\mu(z_\alpha, M) \rightarrow \nu(z, M_1^S)$ , ゆえに  $\nu(z, M_1^S) = \delta/\pi \in (0, 1)$ . このことから

$$\mathcal{S} = \{ z \in D_1 : 0 < \nu(z, M_1^S) < 1 \}$$

となる.

Lindelöf の定理の証明, すなわち  $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$  を示すために次の命題を用いる.

命題.  $M$  は  $X (= M(\mathbb{D}(C)))$  上の Borel 集合とする.  $H^\infty$  の関数  $f$  が  $\|f\| \leq 1$  かつ  $M$  上で  $|\hat{f}| \leq \varepsilon$  ならば

$$|\hat{f}(z)| \leq e^{\nu(z, M)} \quad \text{for } z \in \overline{D}$$

特に,  $M$  (または  $X - M$ ) 上で  $\hat{f} \equiv 0$  ならば,  $0 < \nu(z, M) < 1$  なる  $z \in \overline{D}$  に対して  $\hat{f}(z) = 0$  となる.

証明.  $z \in \overline{D}$  とする.

$$\begin{aligned} \log |\hat{f}(z)| &\leq \int_X \log |\hat{f}| \nu(z, d\xi) = \int_M \log |\hat{f}| \nu(z, d\xi) + \int_{X-M} \log |\hat{f}| \nu(z, d\xi) \\ &\leq \int_M \log |\hat{f}| \nu(z, d\xi) \leq (\log \varepsilon) \nu(z, M) = \log \varepsilon^{\nu(z, M)} \\ \therefore |\hat{f}(z)| &\leq \varepsilon^{\nu(z, M)} \quad (\text{終了}) \end{aligned}$$

この命題から直ちに  $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$  がわかる. (Lindelöf の定理の証明終り).

$M = \bigcap e^{i\theta_0}$  ( $0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$ ) とする.  $z$  を  $\overline{D}$  の点として,  $z$  の表現測度の (閉) support を  $S(z)$  で表わす.

$$\begin{aligned} z \in \text{hull } M_1^S &= \{z \in D_1 : |\hat{f}(z)| \leq \sup_{M_1^S} |\hat{f}| \text{ for } \forall f \in M^\infty\} \\ &\iff S(z) \subset M_1^S \end{aligned}$$

よって,

$$z \notin \text{hull } M_1^S \iff 0 \leq \nu(z, M_1^S) < 1$$

$$\begin{aligned} z \notin \text{hull } (X_1 - M_1^S) &\iff 0 \leq \nu(z, X_1 - M_1^S) < 1 \\ &\therefore 0 < \nu(z, M_1^S) \end{aligned}$$

$$\therefore z \in (\text{hull } M_1^S)^c \cap (\text{hull } (X_1 - M_1^S))^c \iff 0 < \nu(z, M_1^S) < 1$$

$$\text{よって, } \mathcal{S} = (\text{hull } M_1^S)^c \cap (\text{hull } (X_1 - M_1^S))^c \text{ と } \mathcal{S} \text{ である.}$$

$\overline{\mathcal{S}} = \mathcal{L}$  であることが証明されてゐる. (cf. [6])

§4. Nontangential points と Tangential points

$D$  の部分集合  $U$  が点  $1$  の削除された (deleted) nontangential



近傍であるとは、点  $1$  を頂点としたすべての Stolz 角領域  $S$  に対して、点  $1$  を中心とする十分小さい円板内にある  $S$  の部分を  $U$  が含むときをいう。点  $1$  の削り取れた近傍からなる filter を  $\mathcal{A}$  で表わす。 $\Gamma_A'$  の点を non-tangential point という。

定理. (1) Stolz 点の集合  $\mathcal{S}$  の  $\overline{D}$  における閉包は  $\Gamma_A'$  である。  
したがって  $\Gamma_A' = \mathcal{L}$  となる。

(2)  $D' - D_1$  の  $\overline{D}$  における閉包と  $\Gamma_A'$  は交わらない。

(3)  $\mathcal{S} \subset D_1$  は  $D'$  の開集合である。

(4)  $\Gamma_A'$  は連結集合である。

証明. (1) 省略

(2)  $f(z) = \exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$  を考えよと、 $D' - D_1$  上では  $|\hat{f}(z)| = 1$  であるから、 $\overline{D' - D_1}$  上でも  $|\hat{f}(z)| = 1$  となる。一方  $\mathcal{S}$  上では  $\hat{f} = 0$  であるから  $\Gamma_A'$  上でも  $\hat{f} = 0$  となる。

(3)  $(\mathcal{S} \subset) \Gamma_A'$  は  $D'$  の開集合  $D' - (\overline{D' - D_1})$  に含まれ、また  $\mathcal{S}$  は  $D_1$  の開集合であることも既にみているから、

(4) 省略

(証了)。

$D$  における調和変数  $u(z) = \arg(1-z)$  ( $-\frac{\pi}{2} < u(z) < \frac{\pi}{2}$ ) と考えよ。 $D$  の部分集合  $B$  が点  $1$  において  $C$  に接するとは

$\lim_{\substack{z \in B \\ z \rightarrow 1}} |u| = \frac{\pi}{2}$  ( $\Leftrightarrow D-B$  が点 1 の削りかた nontangential 近傍である) のときを云う. また  $D_1$  の点  $z$  が tangential であるとは点 1 において  $C$  に接するある集合  $B$  に対して,  $z \in B'$  となっていることである. tangential points の集合を  $\mathcal{T}$  で表わす.

定理.  $D_1 = \Gamma_A' \cup \mathcal{T}$  かつ  $\Gamma_A' \cap \mathcal{T} = \emptyset$  である.

定理.  $A$  を点 1 における削りかた nontangential 近傍とすると,  $A \cup D_1$  は ( $\bar{D}$  における)  $\Gamma_A'$  の近傍である. よって  $\Gamma_A = \Gamma(\Gamma_A')$  である.

証明.  $A$  を点 1 における削りかた nontangential 近傍とすると  $(D-A)'$  は tangential 点のみからなり,  $\overline{D-A} \cap \Gamma_A' = \emptyset$  となる. また  $\overline{D-D_1} \cap \Gamma_A' = \emptyset$  であることを証明しているから. (証明).

$\lim_{\Gamma_A} f = \alpha$  まうは "  $\exists B \in \Gamma_A$ ,  $\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in B}} f(z) = \alpha$  となること が証明出来る. (このことを  $\Gamma_A$  は安定収束 (convergence stable) であるという). "  $f \in H^\infty$  に対して  $\lim_{\Gamma_A} f = \alpha$  とする. そうすると  $\hat{f}|_{\Gamma_A'} = \alpha$  となる.  $\Gamma_A' = \Gamma(\Gamma_A')$  であつたから,  $\Gamma_A'$  のある  $\bar{D}$  近傍  $U(\Gamma_A')$  があって,  $U(\Gamma_A')$  の  $D$  上の trace  $T = U(\Gamma_A') \cap D$  に対して  $\lim_{\substack{z \in T \\ z \rightarrow 1}} f = \alpha$ , よって  $\hat{f}|_T = \alpha$ . しかるに  $T \supset U(\Gamma_A') \cap D$  であるから,  $\Gamma_A'$  の  $D_1$  に向するある近傍上で  $\hat{f} \equiv \alpha$  となる.

§5.  $L$  minimal filter と  $L$  maximal filter

$\Gamma$  を  $D$  の部分集合からなる filter で ユークリット 極限 1 をもつものとする.  $\Gamma$  が  $L$  minimal であるとは  $\Gamma$  より真に粗い ユークリット 極限 1 をもつ filter  $\Gamma_1$  で,  $f \in H^\infty$  に対して  $\lim_{\Gamma} f$  が存在するならば  $\lim_{\Gamma_1} f$  も存在するという  $\Gamma_1$  が存在しないことである.

$H^\infty$  の関数  $f$  に対して,  $\lim_{\Gamma} f = \alpha$  であることと  $\lim_{\Gamma(\Gamma')} f = \alpha$  であることと同値であるから,  $\Gamma$  が  $L$  minimal であるならば  $\Gamma(\Gamma') = \Gamma$  となる.

$D_1$  の部分集合  $A$  が  $L$  maximal であるとは,  $A \subseteq A_1$  かつ  $f \in H^\infty$ ,  $f|_A = c$  (定数) ならば  $f|_{A_1} = c$  となる  $A_1$  が存在しないことである. 次のことが成り立つ.

$$\Gamma: L \text{ minimal} \iff \Gamma = \Gamma(\Gamma'), \Gamma': L \text{ maximal}$$

任意個数の  $L$  maximal 集合の共通部分はまた  $L$  maximal 集合である. 有限個の  $L$  maximal 集合の和集合はまた  $L$  maximal 集合である.

定理  $u$  は  $D$  上の有界な調和関数で  $a = \inf u < b = \sup u$  であるとする. このとき

$$\{z \in D_1; a < \hat{u}(z)\}^-, \{z \in D_1; \hat{u}(z) < b\}^- \\ \{z \in D_1; a < \hat{u}(z) < b\}^-$$

は  $L$ -maximal が空集合である。

$D$  上の調和関数  $u(z) = \arg(1-z)$  ( $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$ ) を考える。  
 $\inf u = -\frac{\pi}{2}$ ,  $\sup u = \frac{\pi}{2}$  で,  $\{z \in D_1 : -\frac{\pi}{2} < \hat{u}(z) < \frac{\pi}{2}\}^-$   
 $= \bar{A}'$  であるから  $\bar{A}'$  は  $L$ -maximal, よって  $\bar{A}$  は  $L$ -minimal  
 である。

### § 6. Fiber $D_1$ 中にある Gleason part.

(一般論) コンパクトなハウスドルフ空間  $X$  上の uniform algebra  $A$  の極大イデアル空間  $M(A)$  の点  $m$  を通る Gleason part  $P(m)$  が nontrivial であるとする。さらに  $m$  の表現測度がただ一つであると仮定する。そうすると  $P(m)$  の各要素  $\varphi$  の表現測度もただ一つであるので, それをまた  $\varphi$  で表わすことにする。 $A$  の  $L^p(m)$  ノルムによる閉包を  $H^p(m)$  ( $p=\infty$  のときは  $w^*$  閉包) で表わす。また Wermer の embedding function  $Z$  についての多項式の  $L^p(m)$  ノルム閉包 ( $p=\infty$  のときは  $w^*$  閉包) を  $\mathcal{H}^p$  で表わす。また  $I^p = \{f \in H^p(m) : \int \bar{Z}^n f d\mu = 0, n=0, 1, 2, \dots\}$  とおく。このとき

$$H^p(m) = \mathcal{H}^p \oplus I^p$$

となる。ただし  $\oplus$  は代数的直和である。

写像  $\sum_{n=1}^k a_n e^{in\theta} \mapsto \sum_{n=1}^k a_n Z^n$  は古典的 Hardy space

$H^p(d\theta)$  から  $\mathcal{H}^p$  への isometrically isomorphic map に拡張する

来る。

$\hat{Z}(\varphi) (= \int Z d\varphi)$  は  $P(m)$  から  $D$  上への一対一写像であり,  
その逆写像  $\tau(z)$  は連続で, 関数  $f \in H^\infty(m)$  に対して

$$\hat{f}(\tau(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad a_n = \int \bar{Z}^n f dm$$

となる (Wermer の定理)

このとき (集合として)

$$\hat{H}^\infty(m)|_{\tau(D)} = \mathcal{H}^\infty(\tau(D)) = H^\infty(D)$$

となる. (Cf. S. Merrill and N. Lal, Characterization of certain invariant subspace of  $H^p$  and  $L^p$  spaces derived from logmodular algebra, Pacif. J. Math. 30 (1969), 463—474) (一般論終り)

$\hat{H}^\infty(D)$  を fiber  $D_1$  に制限することによって得られる algebra を  $A_1$  で表わす.

$D_1$  の任意の一点  $m$  の表現測度の閉 support  $S(m)$  は  $A_1$  の peak sets の積集合で  $A = A_1|_{S(m)}$  とおくと  $\log |A^{-1}| = C_R(S(m))$  となる. また  $m$  を通る Gleason part  $P(m)$  の  $D_1$  における閉包と  $S(m)$  は交わらない.

$D_1$  の中に次のような  $m$  が存在する.

- (1)  $m$  を通る Gleason part  $P(m)$  が nontrivial である.
- (2) Wermer の embedding function  $Z$  が  $H^\infty(D)$  の関数であって,  $\tau: D \rightarrow P(m)$  が同相写像である.

(3) 任意の  $H^\infty(D)$  の関数  $f$  に対して  $\hat{f}|_D$  が  $H^\infty(D)$  の関数であり, 逆に任意の  $H^\infty(D)$  の関数  $f$  に対してある関数  $g \in H^\infty(D)$  が存在して  $\|g\| = \|f\|$ ,  $\hat{g}|_D = f$  とする. 亦ち亦ち  $A|P = H^\infty(D)$  とする. 逆に次の定理が成り立つ

**定理**  $A|P = H^\infty(D)$  のときは  $P$  と  $D$  は同相になる.

**証明.**  $m \in P$  をとり,  $A$  の  $L^\infty(m)$  の  $w^*$  閉包を  $H^\infty(m)$  で表わす.  $\varphi \in P$  のとき  $H^\infty(m) = H^\infty(\varphi)$  である.

$$\tilde{\varphi}(f) = \int f d\varphi, \quad f \in H^\infty(m)$$

によ,  $\tilde{\cdot}$  定義され  $\tilde{\varphi}$  は  $M(H^\infty(m))$  の要素で,

$$\mathcal{J}_0 = \{ \tilde{\varphi} : \varphi \in P(m) \}$$

は  $M(H^\infty(m))$  の Gleason part である.

$$\begin{aligned} H^\infty(D) = A|P &= A|\mathcal{J}_0 \subset H^\infty(m)|\mathcal{J}_0 \\ &= \mathcal{H}^\infty|\mathcal{J}_0 = H^\infty(D) \end{aligned}$$

$$\text{から } A|\mathcal{J}_0 = \mathcal{H}^\infty|\mathcal{J}_0 \quad \therefore A|\mathcal{J}_0^- = \mathcal{H}^\infty|\mathcal{J}_0^-.$$

$\Phi \in M(H^\infty(m))$  に対して  $\pi\Phi = \Phi|A$  によって  $\pi$  を定義すると,  $\pi$  は連続で,

$$\pi \mathcal{J}_0^- = \bar{P}$$

となる. ゆえに

$$\mathcal{H}^\infty|\mathcal{J}_0^- = A|\mathcal{J}_0^- = A|\pi\mathcal{J}_0^- = A|\bar{P}$$

となるから,  $\pi$  は  $\mathcal{J}_0^-$  から  $\bar{P}$  上への一対一連続な写像である.

よって  $\pi$  は  $\mathcal{D}$  から  $P$  上への同相写像になる。一方  $D$  と  $\mathcal{D}$  とは同相であることが知られているから  $\tau: D \rightarrow P$  は同相写像である。(証了)。

よって  $P$  と  $D$  が同相であることは  $A(P) \cong H^\infty(D)$  とする。そのより具体例は ([4], p. 109) にある。

### 文献

- [1] T. K. Boehme, M. Rosenfeld and Max. L. Weiss.  
Relations between bounded analytic functions and  
their boundary functions. J. London Math. Soc. (2),  
1 (1969), 609-618.
- [2] J. L. Dool, Boundary approach filters for  
analytic functions. Ann. Inst. Fourier, 23 (1973),  
187-217.
- [3] K. Hoffman, Banach space of analytic functions,  
Prentice Hall 1962.
- [4] ———, Bounded analytic functions and  
Gleason parts, Ann. Math. 86 (1967), 74-111.
- [5] M. Rosenfeld and Max. L. Weiss, Bounded  
analytic functions tending radially to zero. Proc.  
London Math. Soc. (3), 18 (1968), 714-726.

[6] M. Rosenfeld and Max. L. Weiss, A function algebra approach to a theorem of Lindelöf, J. London Math. Soc. (2) 2 (1970), 209 - 215.

[7] I. J. Scharf, Maximal ideals in an algebra of bounded analytic functions, J. Math. Mech., 10 (1961), 735 - 746.